

名大理系数学講義資料

この講義で扱う問題は全て名古屋大学の過去問です．必ず予習をしてから動画を見てください！！！！

【1】（2005 年名古屋大）

(1) 連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ をみたすとき， $\int_0^{\pi} \left(x-\frac{\pi}{2}\right) f(x) dx = 0$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{4 - \cos^2 x} dx$ を求めよ．

【2】（2008 年名古屋大）

曲線 $C: y = \log x$ 上の点 $P(a, \log a)$ ，点 $Q(b, \log b)$ ($1 < a < b$) をとる．点 P ， Q から x 軸に下ろした 2 本の垂線と x 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を S とする．点 P ， Q から y 軸に下ろした 2 本の垂線と y 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を T とする．このとき， $S=T$ となるように b がとれる a の値の範囲を求めよ．

【3】（1998 年名古屋大）

N を自然数とし，複素数 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ は $z^N = 1$ を満たすとして，以下の級数和 S_1 ， S_2 ， S_3 の値を求めよ．ただし，ここで i は虚数単位 ($i^2 = -1$) である．

(1) $S_1 = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1}$

(2) $S_2 = 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos (N-1)\theta$

(3) $S_3 = 1 + \cos^2 \theta + \cos^2 2\theta + \cdots + \cos^2 (N-1)\theta$

【4】（2002 年名古屋大）

次の問いに答えよ．ただし，偏角 θ は， $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲で考えるものとする．

(1) $|z+i| = |z-i|$ を満たす複素数 z は，実数に限ることを示せ．

(2) 複素数平面上で z が実軸上を動くとき，複素数 $z+i$ の偏角 $\arg(z+i)$ の動く範囲を求めよ．

(3) z を未知数とする方程式 $(z+i)^9 = (z-i)^9$ のすべての解 z について $z+i$ の偏角 $\arg(z+i)$ を求めよ．

【5】（2012 年名古屋大）

m, p を 3 以上の奇数とし, m は p で割り切れないとする.

- (1) $(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ.
- (2) $(p-1)^m + 1$ は p で割り切れることを示せ.
- (3) $(p-1)^m + 1$ は p^2 で割り切れないことを示せ.
- (4) r を正の整数とし, $s = 3^{r-1}m$ とする. $2^s + 1$ は 3^r で割り切れることを示せ.

【6】（2012 年名古屋大）

n を 2 以上の整数とする. 1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある. ただし, 異なるカードには異なる整数が書かれているものとする. この n 枚のカードから, 1 枚のカードを無作為に取り出して, 書かれた整数を調べてからもとに戻す. この試行を 3 回繰り返して, 取り出したカードに書かれた整数の最小値を X , 最大値を Y とする. 次の問いに答えよ. ただし, j と k は正の整数で, $j+k \leq n$ を満たすとする. また s は $n-1$ 以下の正の整数とする.

- (1) $X \geq j$ かつ $Y \leq j+k$ となる確率を求めよ.
- (2) $X = j$ かつ $Y = j+k$ となる確率を求めよ.
- (3) $Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする. $P(s)$ を求めよ.
- (4) n が偶数のとき, $P(s)$ を最大にする s を求めよ.

【7】（2010 年名古屋大）

はじめに, A が赤玉を 1 個, B が白玉を 1 個, C が青玉を 1 個持っている. 表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を投げ, 表が出れば A と B の玉を交換し, 裏が出れば B と C の玉を交換する, という操作を考える. この操作を n 回 ($n = 1, 2, 3, \dots$) くり返した後, A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とおく.

- (1) $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ を求めよ.
- (2) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n で表せ.
- (3) a_n, b_n, c_n を求めよ.

【 8 】 (2009 年名古屋大)

x, y を正の整数とする.

(1) $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ を満たす組 (x, y) をすべて求めよ.

(2) p を 3 以上の素数とする. $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ を満たす組 (x, y) のうち, $2x+3y$ を最小にする (x, y) を求めよ.

【 9 】 (2007 年名古屋大)

原点 $O(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円に, 円外の点 $P(x_0, y_0)$ から 2 本の接線を引く.

(1) 2 つの接点の中点を Q とするとき, 点 Q の座標 $Q(x_1, y_1)$ を点 P の座標 $P(x_0, y_0)$ を用いて表わせ. また $OP \cdot OQ = 1$ であることを示せ.

(2) 点 P が直線 $x+y=2$ 上を動くとき, 点 Q の軌跡を求めよ.

【 1 0 】 (2001 年名古屋大)

$\triangle ABC$ の外心 (外接円の中心) O が三角形の内部にあるとし, α, β, γ は $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ を満たす正数であるとする. また, 直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を A', B', C' とする.

(1) $\overrightarrow{OA}, \alpha, \beta, \gamma$ を用いて $\overrightarrow{OA'}$ を表せ.

(2) $\triangle A'B'C'$ の外心が O に一致すれば $\alpha = \beta = \gamma$ であることを示せ.

【 1 1 】 (2003 年名古屋大)

(1) 平行四辺形 $ABCD$ において, $AB = CD = a, BC = AD = b, BD = c, AC = d$ とする. このとき, $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(c^2 + d^2)$ が成り立つことを証明せよ.

(2) 3 つの正数 a, b, c ($0 < a \leq b \leq c$) が $a^2 + b^2 > c^2$ を満たすとき, 各面の三角形の長さを a, b, c とする四面体を作れることを証明せよ.

【1 2】（2005 年名古屋大）

1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ を考え、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする. 動点 P は O から A へ辺 OA 上を秒速 1 で, 動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で, 動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速 1 で, 動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で、同時に動き出す.

(1) 動き出してから t 秒後 ($0 \leq t \leq 1$) のベクトル

$\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および t を用いて表せ.

(2) 線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの t ($0 \leq t \leq 1$) の値を求め, ベクトル $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.

【1 3】（2014 年名古屋大）

空間内にある半径 1 の球（内部を含む）を B とする. 直線 l と B が交わっており, その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である.

(1) B の中心と l との距離を求めよ.

(2) l のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ.